Bloque 3
Análisis de circuitos alimentados en corriente alterna

Teoría de Circuitos

Ingeniería Técnica Electrónica

3.1 Introducción. Representación de ondas sinusoidales mediante fasores

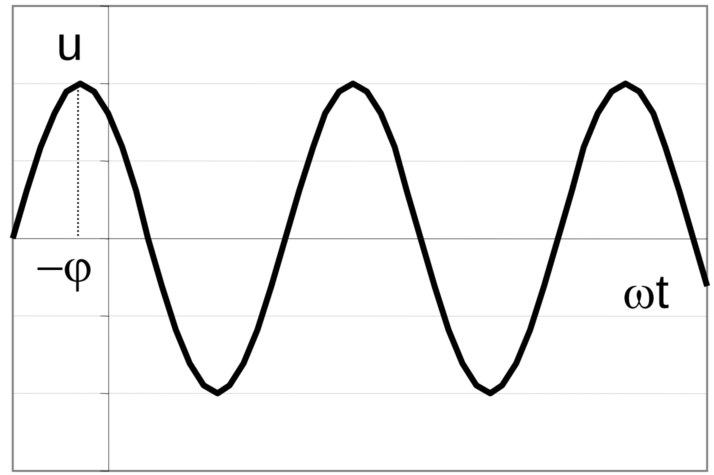
Corriente alterna

Corriente continua

$$u(t) = U_0$$

$$sen\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

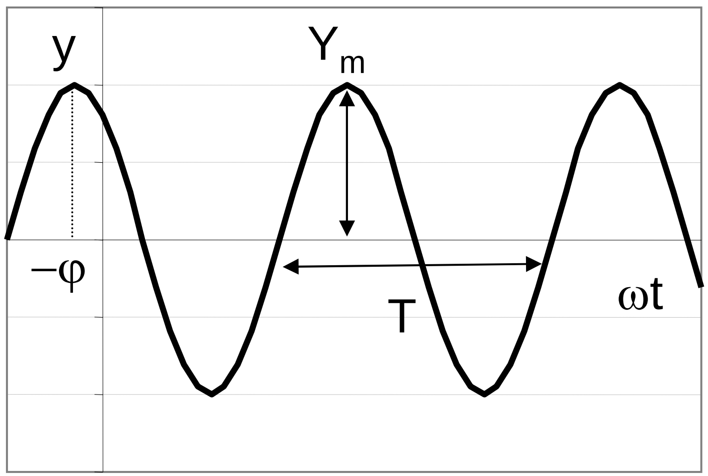
Corriente alterna



$$\boxed{u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$ o bien

$$u(t) = U_0 sen\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

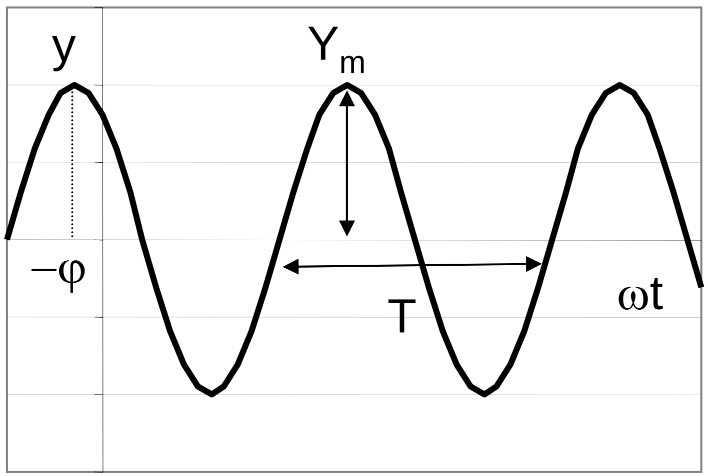
Características de una onda sinusoidal



$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Y_m=Valor máximo= valor de pico=valor de cresta
- y(t)= Valor instantáneo
- T=Periodo= tiempo que se tarda en completar un ciclo completo [s]
- f= Frecuencia= número de ciclos que se describen por segundo=1/T [Hz]

Características de una onda sinusoidal

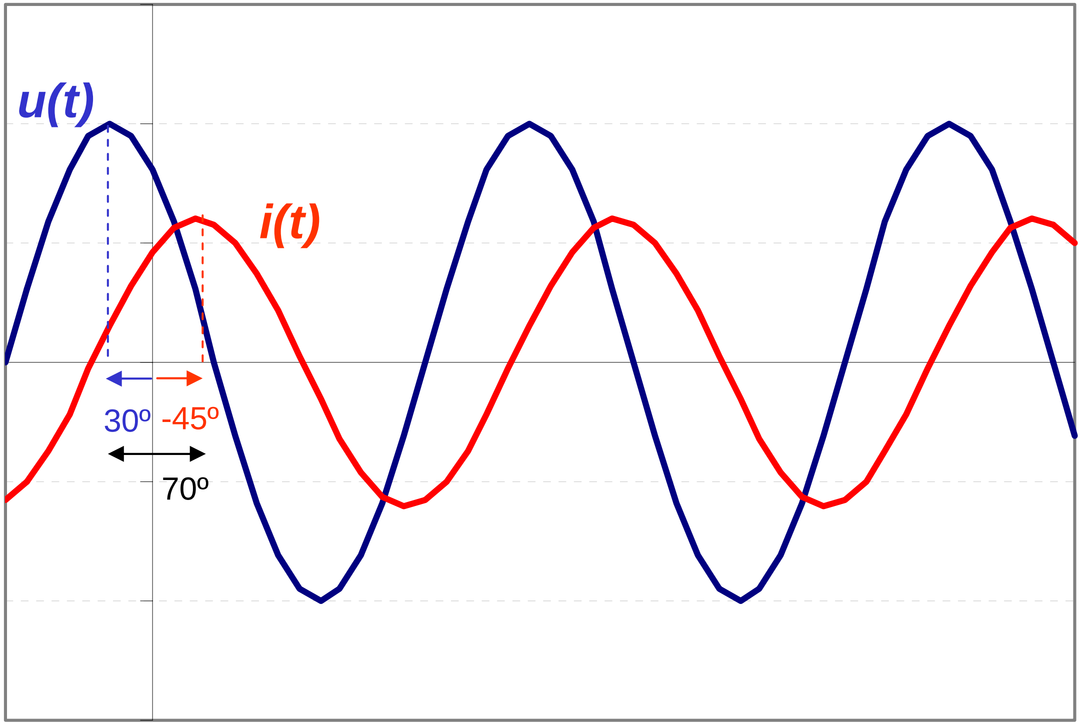


$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- ω= Pulsación; $\omega T = 2\pi$ => $\omega = 2\pi f$ [rad s^{-1}]
- φ=Ángulo de fase [rad]

(El ángulo de fase en ocasiones se expresará en grados por comodidad, pero no es correcto dimensionalmente)

Desfase relativo



u está adelantada 70 º respecto a i

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Desfase entre u e i

$$\boxed{\varphi = \varphi_U - \varphi_I}$$

- φ<0 u en retraso resp a i
- φ>0 u en adelanto resp i
- φ=0 “en fase”
- φ=90º “en cuadratura”
- φ=180º “en oposición”

Valor medio y valor eficaz

$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Valor medio

$$Y_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Y_m \cos(\omega t + \varphi)dt = 0$$

- Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt} = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}}$$

El valor eficaz de una corriente periódica es el valor de una corriente continua que al circular por una resistencia R produce en un tiempo T la misma cantidad de energía disipada

Significado físico de valor eficaz

- Resistencia R atravesada por una corriente $i(t) = I_m \cdot \cos \omega t$

- Energía disipada en T: $W_{AC} = \int_0^T R i^2(t) dt$

- ¿Cuánto vale la corriente continua que debe circular por R para disipar en un tiempo T la misma energía?

$$W_{DC} = \int_0^T R I^2 dt = R I^2 T$$

Igualando W_{AC} con W_{DC}

$$R I^2 T = \int_0^T R i^2(t) dt$$

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt} = I_{eficaz}}$$

Resumen de notación

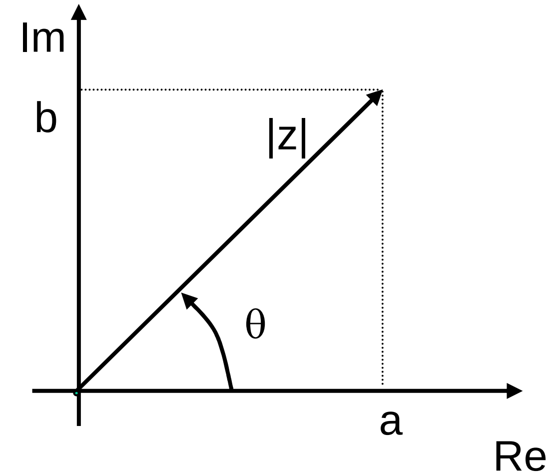
$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}Y \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Valor instantáneo: y
- Valor eficaz: Y
- Valor máximo: Y_m
- Fasor: *Y*

Repaso números complejos

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1$$

$$z = \underbrace{a + bj}_{binómica} = \underbrace{|z|\angle\theta}_{polar} = \underbrace{|z|e^{j\theta}}_{\exp onencial}$$

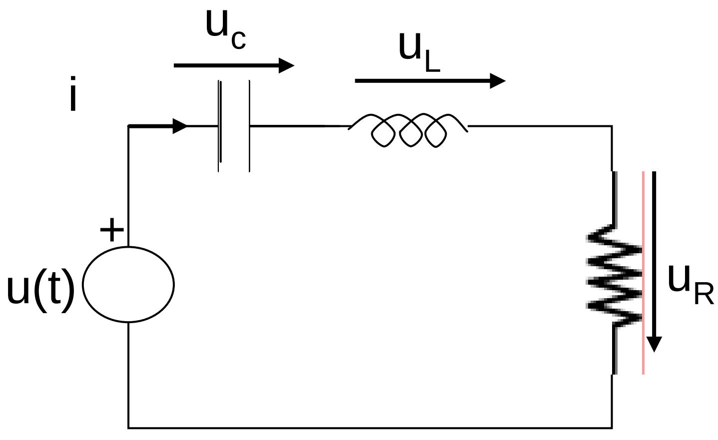


Fórmula de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta + j sen\theta$$

$$z = a + bj = |z|e^{j\theta} = |z|\cos\theta + j|z| sen\theta$$

Análisis de circuitos con excitación alterna



Conocemos u(t) y queremos calcular i(t)

$$u(t) = u_C + u_L + u_R$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \qquad u_L = L\frac{di(t)}{dt} \qquad u_R = Ri$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + L\frac{di(t)}{dt} + Ri}$$

Para obtener el valor de i(t) se debe resolver la ecuación diferencial:

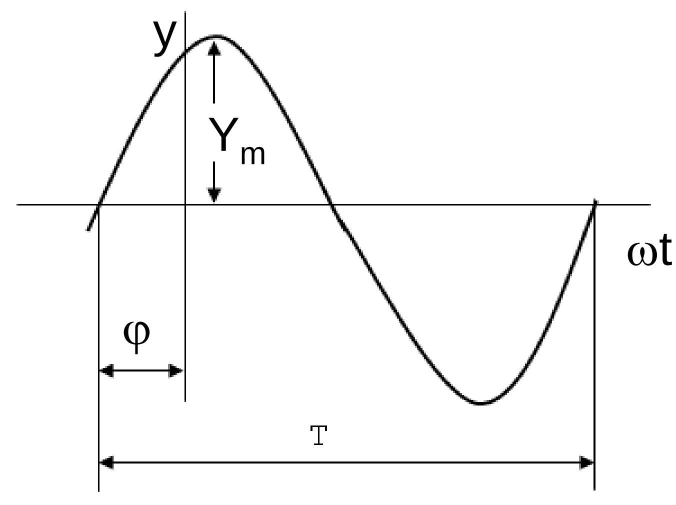
$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C}i + L\frac{d^2 i(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt}$$

$i(t)=i_h+i_p$

(Reg. permanente+Reg.transitorio)

Analogía senoides fasores

En corriente alterna las tensiones y corrientes serán funciones sinusoidales del tipo:



$$y(t) = \underbrace{\sqrt{2}Y}_{\text{amplitud}} \cos\left(\omega t \underbrace{+ \varphi}_{\text{desfase respecto al origen}}\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$ viene impuesta por la fuente de alimentación

Las magnitudes de interés son Y y φ

Representación fasorial

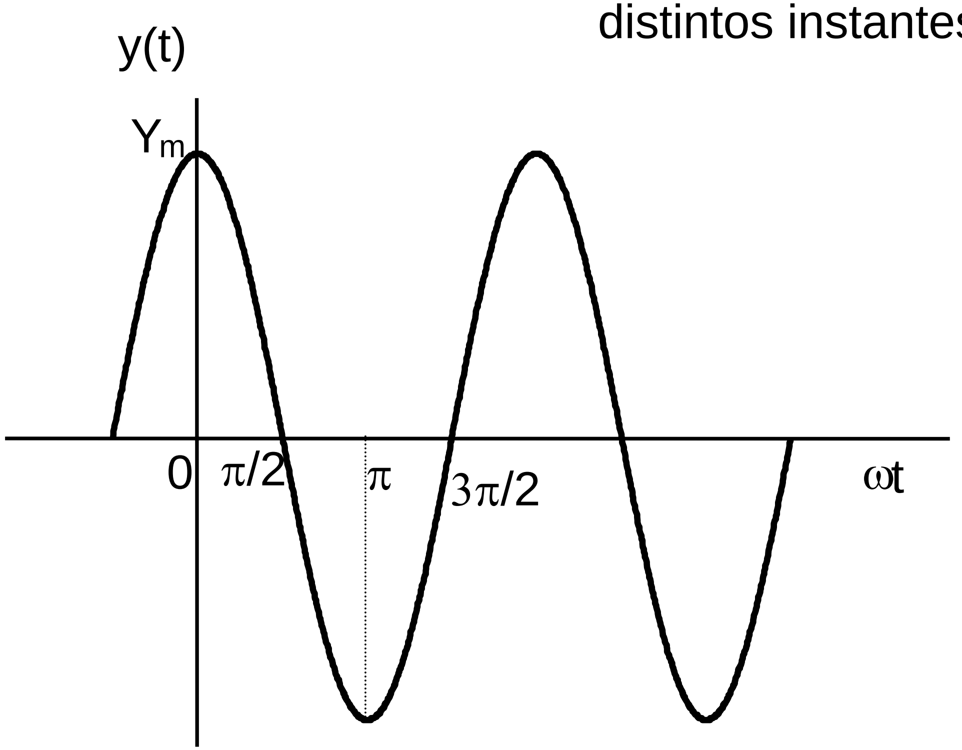
$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

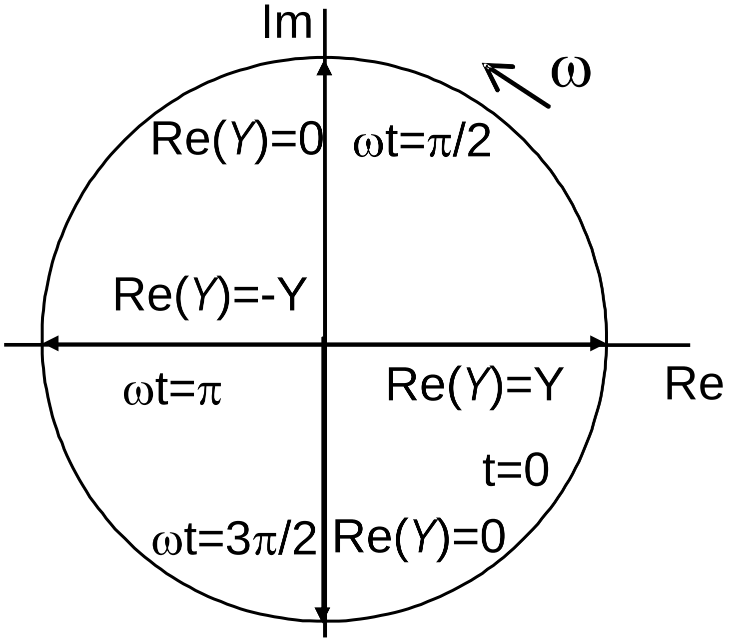
Vamos a demostrar que existe una correspondencia entre una función sinusoidal y(t) y un número complejo Y que se defina como:

$$\mathit{Y} = Y\angle\varphi$$

Representación fasorial

Definimos un número complejo *Y* que gira en el plano complejo a velocidad w y vamos analizando cuanto vale su parte real en los distintos instantes de tiempo

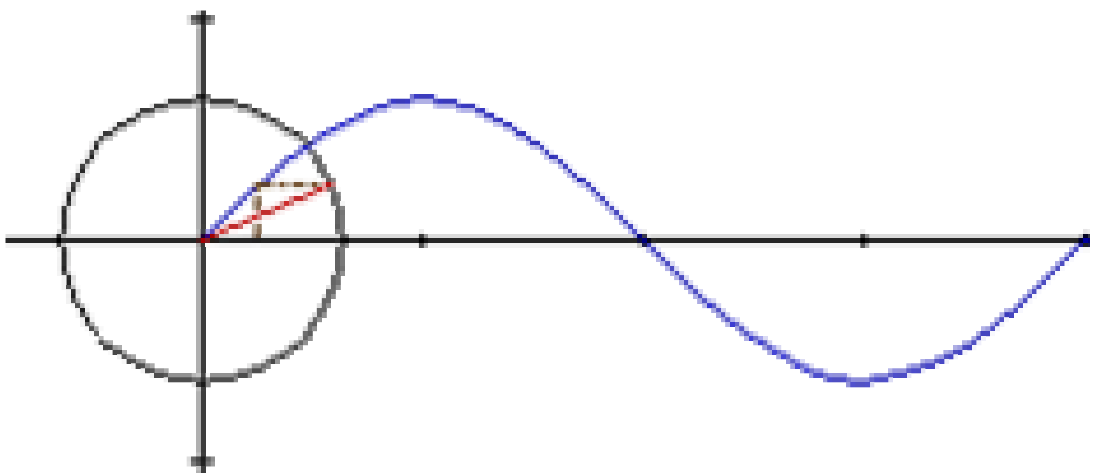




$$y(t) = \sqrt{2}Y \cos \omega t$$

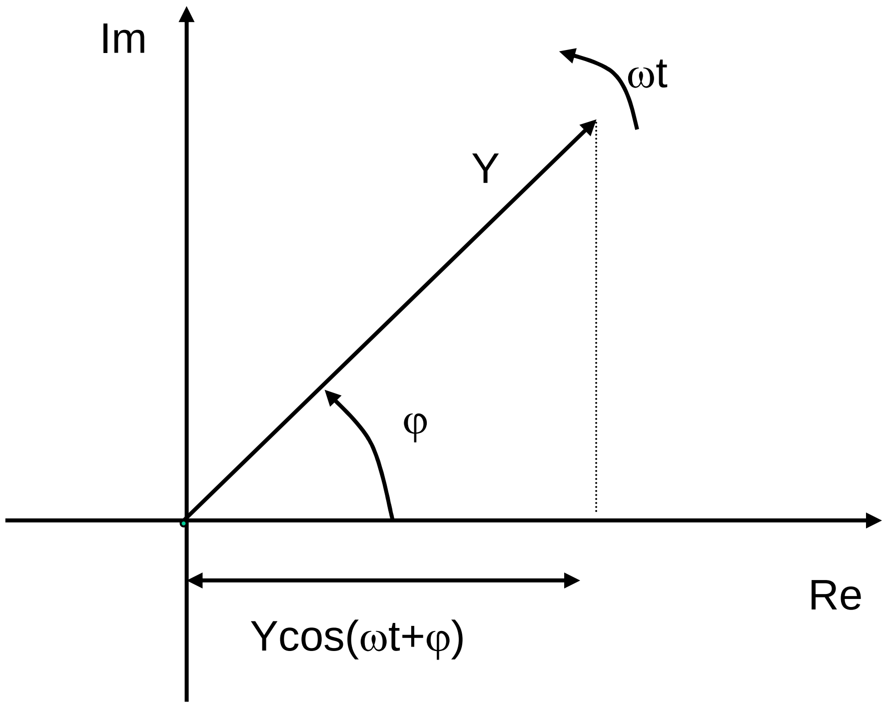
Analogía entre senoides y fasores giratorios

- Existe una correspondencia entre una función sinusoidal y un vector complejo.
- Una función sinusoidal es la proyección de un vector giratorio sobre los ejes de un sistema coordenado (eje real y eje imaginario)



Definición de fasor

- Se denomina fasor a la cantidad compleja $\underline{Y} = Ye^{j\varphi}$



- En corriente alterna representaremos las funciones sinusoidales u(t), i(t) mediante fasores equivalentes

$$\underline{Y} = Y\lfloor\varphi \qquad \left(Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}\right)$$

Relación entre senoides y fasores

$$y(t) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi)$$

$Y = Y\angle\varphi = Ye^{j\varphi}$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$Ye^{j\varphi} e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi + \omega t)} = Y\left(\cos(\varphi + \omega t) + jsen(\varphi + \omega t)\right)$$

relación de Euler

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ye^{j\omega t}\right) = \sqrt{2} Y \cos(\varphi + \omega t)}$$

Una función sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor** equivalente

Suma de sinusoides mediante sus fasores correspondientes

$$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{2} Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2} Y_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Fasores correspondientes $\quad Y_1 = Y_1 | \varphi_1 \qquad Y_2 = Y_2 | \varphi_2$

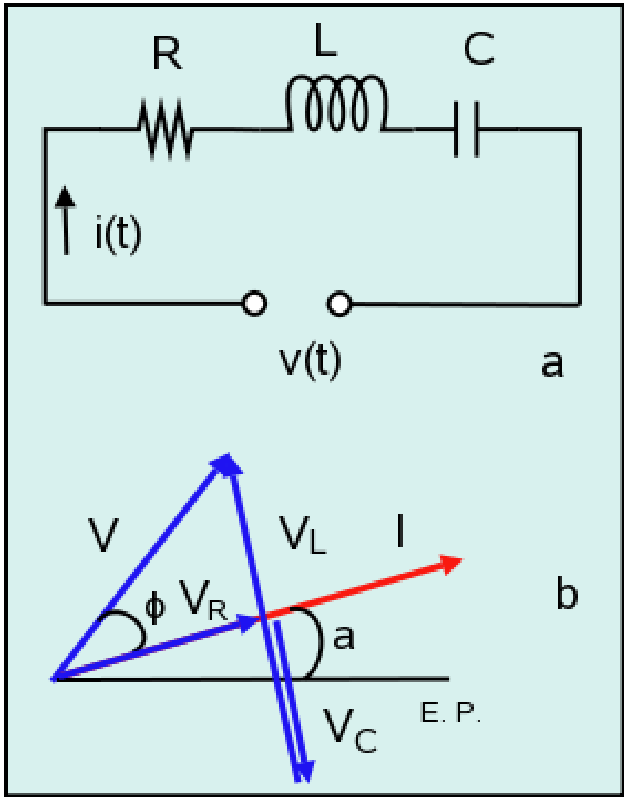
$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Y_1 e^{j\omega t}\right) + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Y_2 e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Y_1 e^{j\omega t} + Y_2 e^{j\omega t}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\left(Y_1 + Y_2\right) e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{Y = \left|Y_1 + Y_2\right|} \qquad \boxed{\varphi = \left|Y_1 + Y_2\right.}$$

Diagrama fasorial

Diagrama en el que se representan los fasores correspondientes de las tensiones y corrientes de un circuito en el plano complejo



Fuente: Wikipedia

3.2. Respuesta de los elementos pasivos a una excitación de tipo sinusoidal. Impedancia y admitancia

Relación entre senoides y fasores

$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

$\bar{Y} = Y\angle\varphi = Ye^{j\varphi}$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$Ye^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi+\omega t)} = Y(\cos(\varphi + \omega t) + jsen(\varphi + \omega t))$$

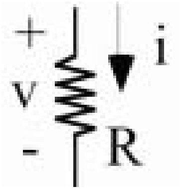
relación de Euler

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\bar{Y}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y\cos(\varphi + \omega t)}$$

Una función sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor** correspondiente

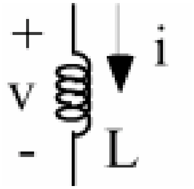
Resumen elementos pasivos

- Resistencia



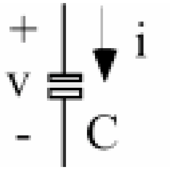
$$u(t) = Ri(t) \qquad i(t) = Gu(t)$$

- Bobina



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

- Condensador



$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

Respuesta de los elementos pasivos

- Vamos a analizar la respuesta de los tres elementos pasivos (resistencia, inductancia y capacidad) a una excitación sinusoidal en el domino del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
- Imaginemos que conocemos la corriente que circula por cada uno de ellos que es de la forma

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Y queremos calcular la tensión entre sus terminales, que será del tipo

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Respuesta de los elementos pasivos

- A partir de las relaciones entre u(t) e i(t) en cada uno de los elementos pasivos determinaremos su respuesta.
- Buscamos encontrar los valores de U y φ_u en función de I, φ_i y los valores de los parámetros R, L y C.
- Los fasores corriente y corriente son:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I} &= I\angle\varphi_i \\ \mathbf{U} &= U\angle\varphi_u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi_i) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{I}e^{j\omega t}\right) \\ u(t) &= \sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{U}e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

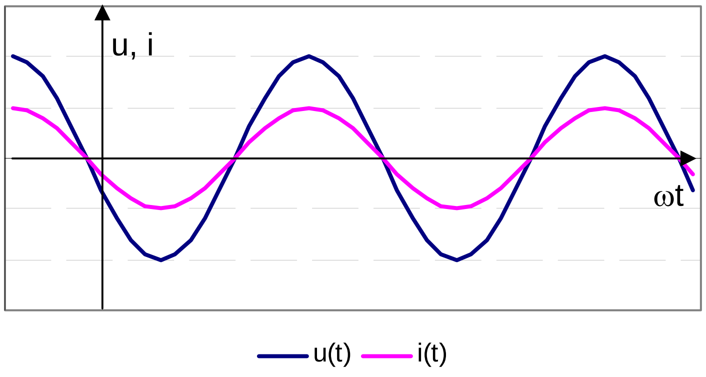
Resistencia

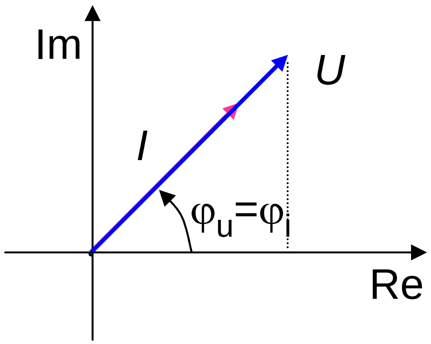
$$\left.\begin{aligned} u &= Ri \\ u(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \end{aligned}\right\} \mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) = R\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(RIe^{j\omega t}\right)$$

$$R \in \mathrm{Re}$$

$$\boxed{U = RI} \Rightarrow U|\varphi_u = RI|\varphi_i \quad \left\{\begin{aligned} U &= RI \\ \varphi_u &= \varphi_i \end{aligned}\right.$$

En una resistencia la tensión y la intensidad están **en fase**





Bobina

$$\left.\begin{array}{l} u = L\dfrac{di}{dt} \\ u(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) \\ i(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \end{array}\right\} \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}I\,\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}Ij\omega e^{j\omega t}\right)$$

I no depende del tiempo

$$u = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) = L\,\mathrm{Re}\left(Ij\omega e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(LIj\omega e^{j\omega t}\right)$$

$$L \in \mathrm{Re}$$

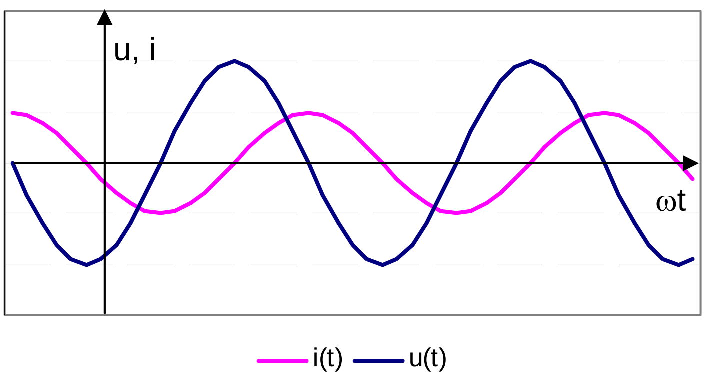
$$\boxed{U = j\omega LI} \Rightarrow U\angle\varphi_u = \omega jLI\angle\varphi_i = \omega LIe^{j90}e^{j\varphi_i} = \omega LI\angle\varphi_i + 90^{\mathrm{o}}$$

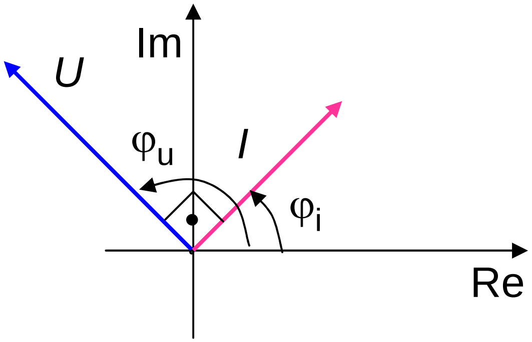
Bobina

$$U\angle\varphi_u = \omega LI\angle\varphi_i + 90^o \quad \begin{cases} U = \omega LI \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^o \end{cases}$$

En una bobina la tensión está **adelantada** 90º respecto a la corriente

$$(\varphi_u > \varphi_i)$$





Condensador

$$\left.\begin{aligned} i &= C\frac{du}{dt} \\ u(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ue^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(U\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Uj\omega e^{j\omega t}\right)$$

U no depende del tiempo

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(Uj\omega Ce^{j\omega t}\right) \Rightarrow \boxed{I = Uj\omega C}$$

$$C \in \mathrm{Re}$$

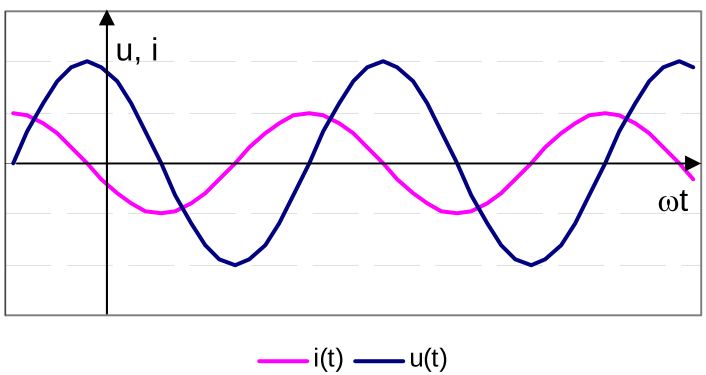
$$\boxed{U = \frac{-j}{\omega C}I} \Rightarrow U\angle\varphi_u = \frac{-j}{\omega C}I\angle\varphi_i = \frac{1}{\omega C}Ie^{-j90}e^{j\varphi_i} = \frac{1}{\omega C}I\angle\varphi_i - 90^{\mathrm{o}}$$

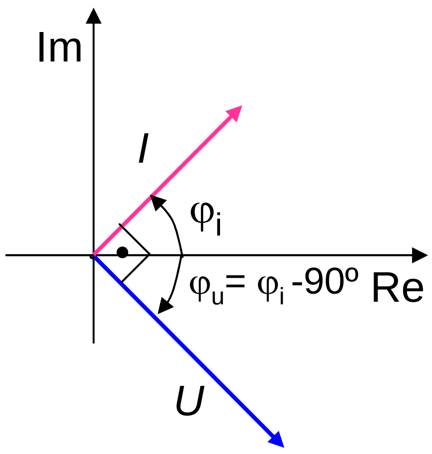
Condensador

$$U\angle\varphi_u = \frac{1}{\omega C} I\angle\varphi_i - 90^{\circ} \begin{cases} U = \dfrac{1}{\omega L} I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^{\circ} \end{cases}$$

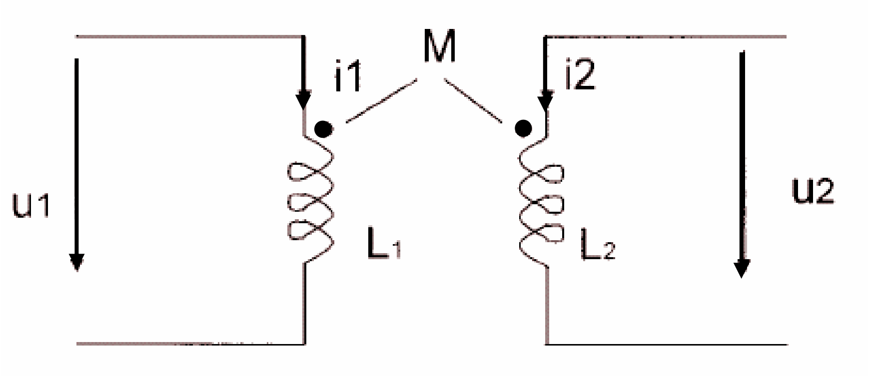
En un condensador la tensión está **retrasada** 90º respecto a la corriente

$$(\varphi_u < \varphi_i)$$





Bobinas acopladas



$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Procediendo de modo análogo a los casos anteriores se llega a las siguientes relaciones fasoriales:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot I_1 + j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot I_2 \\ U_2 &= j \cdot \omega \cdot M_{12} \cdot I_1 + j\omega \cdot L_2 \cdot I_2 \end{aligned}}$$

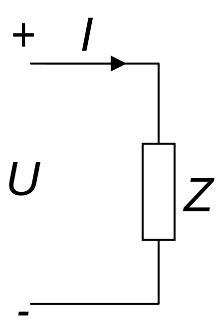
Impedancia compleja

- Las relaciones fasoriales U=f(I) en los elementos pasivos son:

Resistencia	Bobina	Condensador
$U = RI$	$U = j\omega L I$	$U = \dfrac{-j}{\omega C} I$

El fasor tensión puede expresarse como el producto de una cantidad compleja por el fasor corriente

- **Impedancia**: Cociente entre el fasor tensión y el fasor corriente



Se verifica la “Ley de Ohm en notación fasorial”

$$\boxed{U = ZI}$$

Z es un número complejo, pero no un fasor, ya que no se corresponde con ninguna función sinusoidal en el dominio del tiempo

Impedancia

Resistencia

$$Z_R = R$$

Bobina

$$Z_L = j\omega L$$

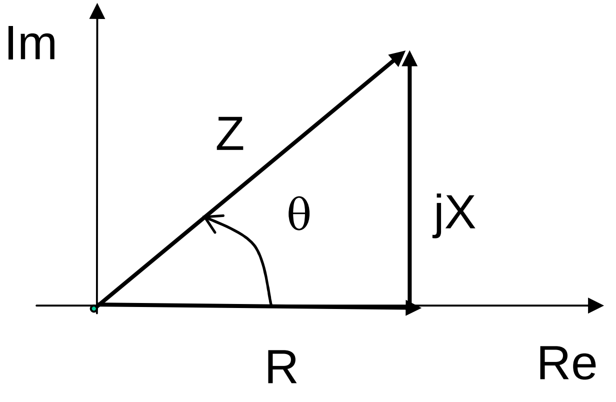
Condensador

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

$$Z = R + jX \begin{cases} \mathrm{Re}(Z) = R & \text{componente resistiva: “Resistencia”} \\ \mathrm{Im}(Z) = X & \text{componente reactiva : “Reactancia”} \begin{cases} X_L = \omega L > 0 \\ X_C = -\dfrac{1}{\omega C} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Z, R y X se expresan en [Ω]

Triángulo de impedancias



$$Z = R + jX$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = arctg\frac{X}{R}$$

$$R = Z\cos\theta \qquad X = Zsen\theta$$

Impedancia y admitancia

$$Z = R + jX$$

Admitancia $$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \begin{cases} \mathrm{Re}(Y) = G & \text{“Conductancia”} \\ \mathrm{Im}(Y) = B & \text{“Susceptancia”} \end{cases}$$

Y , G y B se expresan en [S]

Resistencia	Bobina	Condensador
$Y_R = G$	$Y_L = -j/\omega L$	$Y_C = j\omega C$

Lemas de Kirchhoff en forma fasorial

- Primer Lema de Kirchhoff: La suma algebraica de los fasores corriente en un nudo es igual a cero

$$\sum I = 0$$

- Segundo Lema de Kirchhoff: En un lazo o malla, la suma de las elevaciones de tensión de los generadores, expresadas en forma fasorial, es igual a la suma de las caídas de tensión en las impedancias complejas

$$\sum U = \sum ZI$$

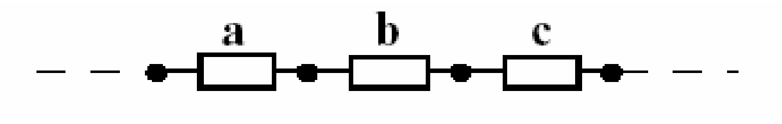
Asociación de impedancias en serie y en paralelo

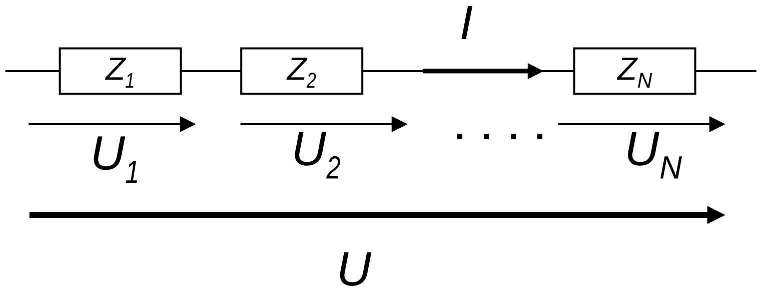
- En régimen sinusoidal permanente es posible agrupar elementos pasivos de distinta naturaleza (resistencias y/o inductancias y/o capacidades) una vez que cada uno de ellos ha sido caracterizado por su impedancia correspondiente.

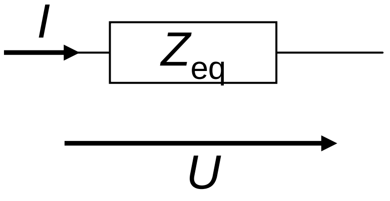
- Las reglas para determinar las impedancias equivalentes de combinaciones de elementos pasivos, son idénticas a las estudiadas para los elementos resistivos, sustituyendo las resistencias por las impedancias complejas.

Asociación de impedancias en serie

- Se dice que dos o más impedancias están en serie si por ellas circula la misma intensidad





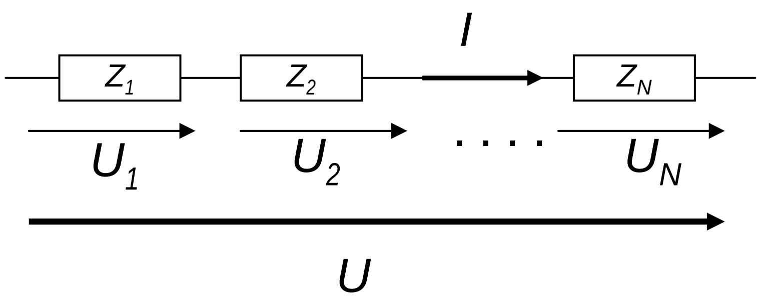


$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n = IZ_1 + IZ_2 + ... + IZ_n = I(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n) = IZ_{eq}$$

$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n}$$

Divisor de tensión

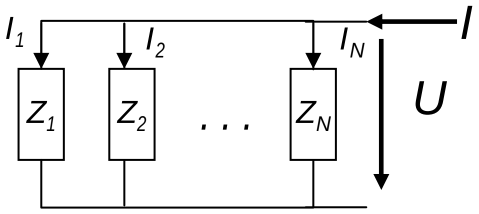
- La tensión que cae en cada resistencia es una porción de la tensión total

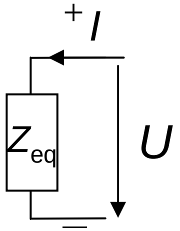


$$U_k = Z_k I = Z_k \frac{U}{Z_1 + Z_2 + ... + Z_N} = \frac{Z_k}{Z_{eq}} U$$

Asociación de impedancias en paralelo

- Se dice que dos o más elementos están en paralelo si están sometidos a la misma tensión

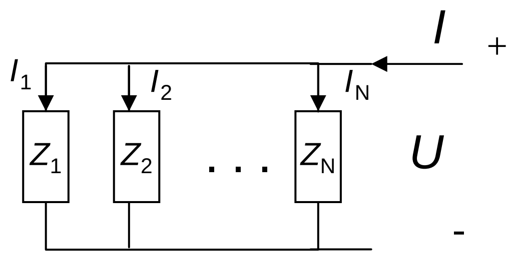




$$I = I_1 + I_2 + ... + I_N = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}\right) U = \left(\frac{1}{Z_{eq}}\right) U \qquad \boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + .. \frac{1}{Z_n}}$$

o bien $\quad I = Y_{eq} U \qquad \boxed{Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N}$

Divisor de corriente

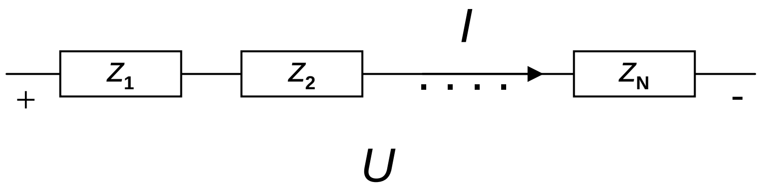


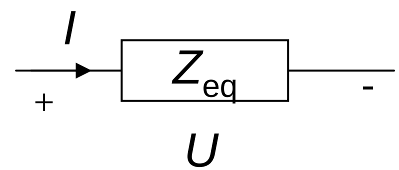
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= UY_1 \\ U &= \frac{I}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n} \end{aligned}\right\} \quad I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n} I$$

$$\boxed{I_k = \frac{\dfrac{1}{Z_k}}{\dfrac{1}{Z_{eq}}} I = \frac{Y_k}{Y_{eq}} I}$$

Asociación de elementos pasivos

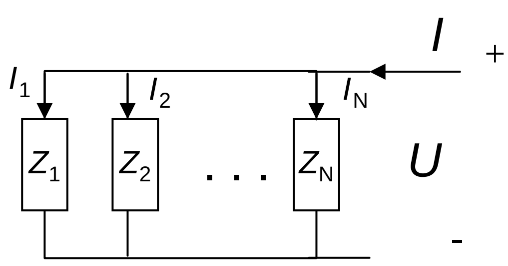
- Asociación en serie

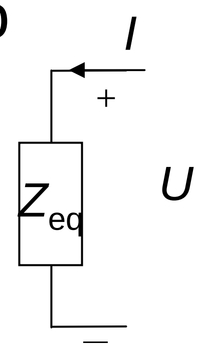




$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N}$$

- Asociación en paralelo

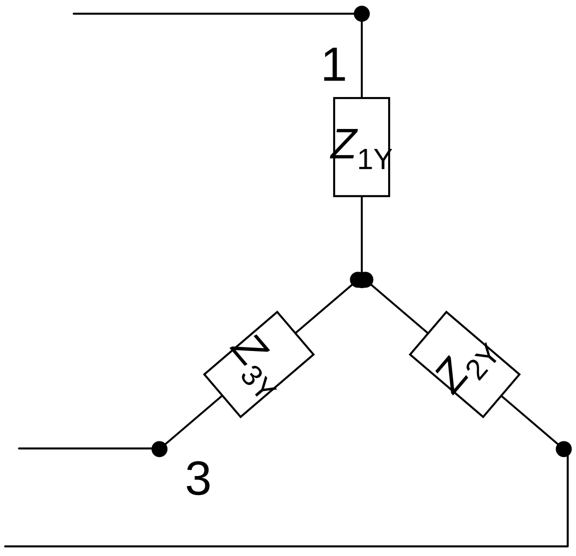


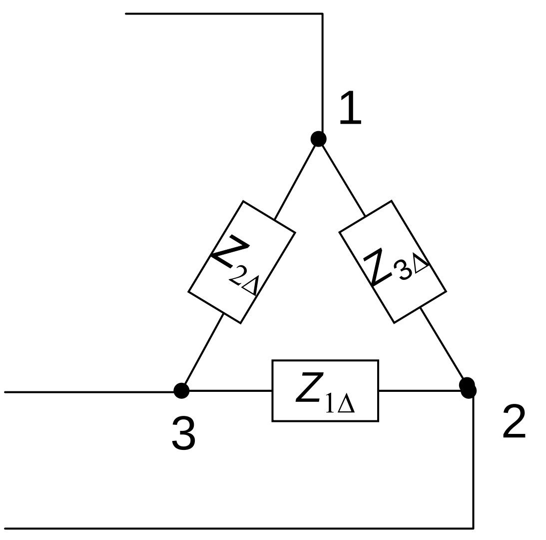


$$\boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + .. \frac{1}{Z_n}}$$

$$\boxed{Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}$$

Equivalentes Y-Δ y Δ -Y





$$Z_{1Y} = \frac{Z_{2\Delta} Z_{3\Delta}}{Z_{1\Delta} + Z_{2\Delta} + Z_{3\Delta}} \qquad Z_{2Y} = \frac{Z_{1\Delta} Z_{3\Delta}}{Z_{1\Delta} + Z_{2\Delta} + Z_{3\Delta}}$$

$$Z_{3Y} = \frac{Z_{1\Delta} Z_{2\Delta}}{Z_{1\Delta} + Z_{2\Delta} + Z_{3\Delta}}$$

$$Z_{1\Delta} = \frac{Z_{1Y} Z_{2Y} + Z_{2Y} Z_{3Y} + Z_{3Y} Z_{1Y}}{Z_{1Y}}$$

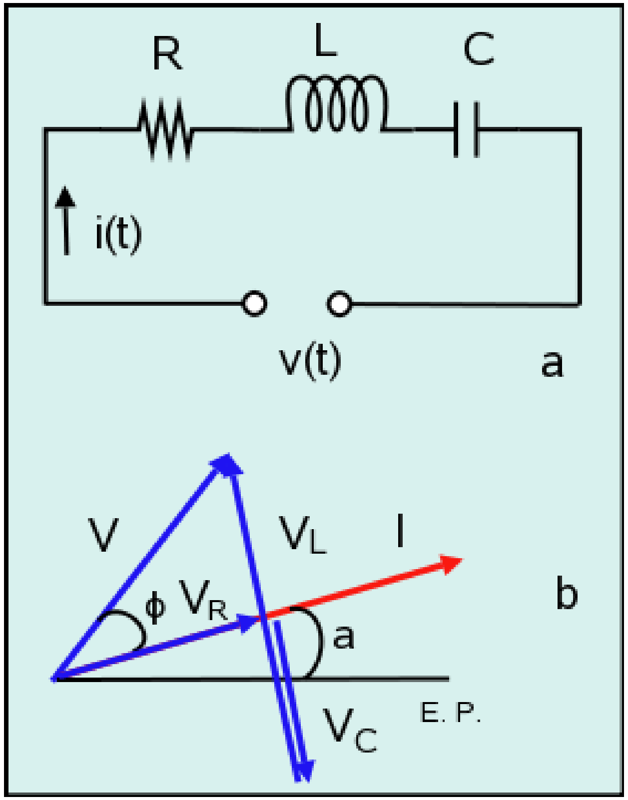
$$Z_{2\Delta} = \frac{Z_{1Y} Z_{2Y} + Z_{2Y} Z_{3Y} + Z_{3Y} Z_{1Y}}{Z_{2Y}}$$

$$Z_{3\Delta} = \frac{Z_{1Y} Z_{2Y} + Z_{2Y} Z_{3Y} + Z_{3Y} Z_{1Y}}{Z_{3Y}}$$

Diagramas fasoriales

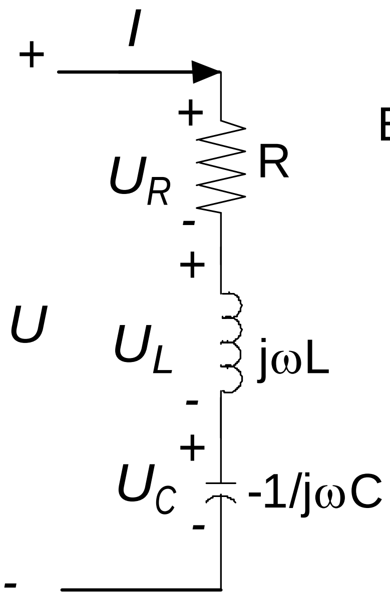
- El diagrama fasorial de un circuito es la representación de sus fasores tensión y corriente en el plano complejo.

- En ocasiones los diagramas fasoriales ayudan en el análisis de los circuitos



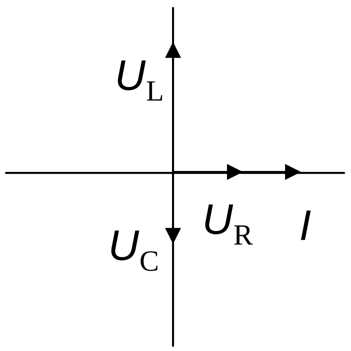
Fuente: Wikipedia

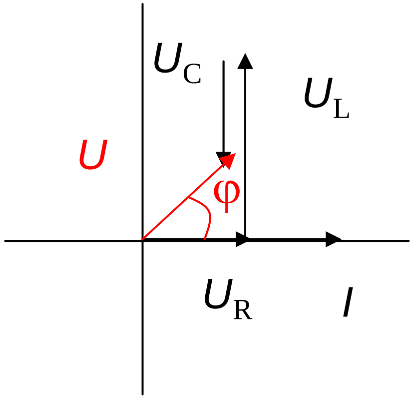
Diagrama fasorial circuito RLC serie



En un circuito serie tomamos I como origen de fases

$$I = I\angle 0^{\circ}$$





$$U_R = RI = RI\angle 0^{\circ} = U_R\angle 0^{\circ}$$

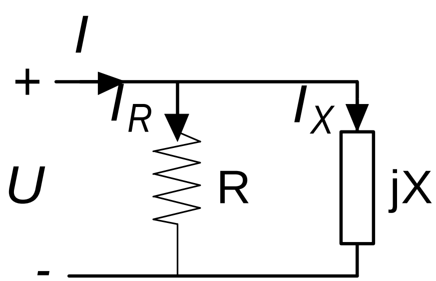
$$U_L = Z_L I = j\omega L I = \omega L I\angle 90^{\circ}$$

$$U_C = Z_C I = \frac{-j}{\omega C} I = \frac{1}{\omega C} I\angle -90^{\circ}$$

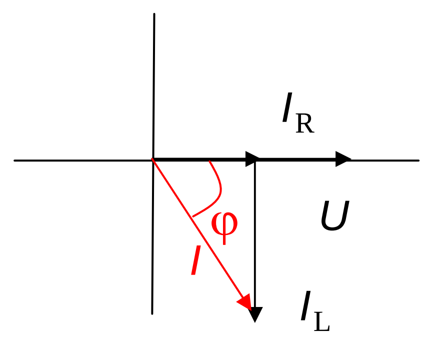
- $U_L > U_C$ => $\varphi > 0$ circuito inductivo
- $U_L < U_C$ => $\varphi < 0$ circuito capacitivo

Diagrama fasorial circuito RX paralelo

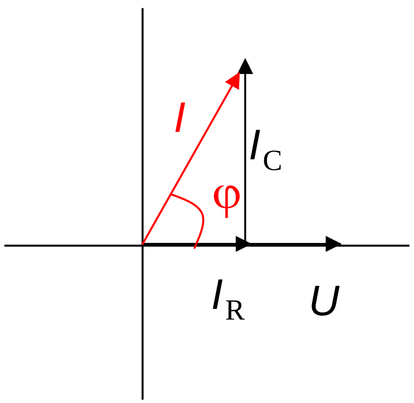
En un circuito serie tomamos *U* como origen de fases $U = U\angle 0^{o}$



Bobina



Condensador



$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{U}{R}\angle 0^{o}$$

$$I_X = \frac{U}{jX} \begin{cases} \text{Bobina} \quad I_X = \dfrac{U}{X_L}\angle -90^{o} \\ \text{Condensador} \quad I_X = \dfrac{U}{X_C}\angle 90^{o} \end{cases}$$

3.3. Resolución de circuitos en corriente alterna

Análisis de circuitos alimentados en C.A.

- Se sustituye el circuito en el dominio del tiempo por un circuito en el dominio de la frecuencia
  - Los elementos pasivos se sustituyen por sus impedancias complejas correspondientes
  - Las corriente y tensiones en el dominio del tiempo se sustituyen por sus fasores correspondientes
- Se aplican los lemas de Kirchhoff en forma fasorial

Lemas de Kirchhoff en forma fasorial

- Primer Lema de Kirchhoff: La suma algebraica de los fasores corriente en un nudo es igual a cero

$$\sum I = 0$$

- Segundo Lema de Kirchhoff: En un lazo o malla, la suma de las elevaciones de tensión de los generadores, expresadas en forma fasorial, es igual a la suma de las caídas de tensión en las impedancias complejas

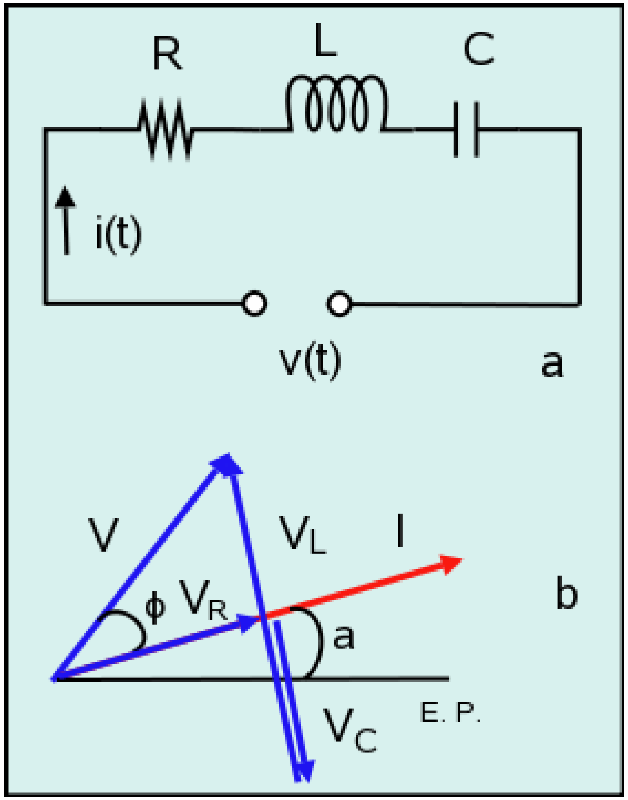
$$\sum U = \sum ZI$$

Métodos de resolución de circuitos

- Todos los métodos estudiados para la resolución de circuitos alimentados en corriente continua, son directamente aplicables a circuitos alimentados en alterna, trabajando en el dominio de la frecuencia.
  - Método de las corrientes de malla
  - Método de las tensiones de nudo
  - Principio de superposición: Especialmente útil cuando en un circuito existen fuentes de distinta frecuencia que actúan simultáneamente
  - Teoremas de Thevenin y Norton

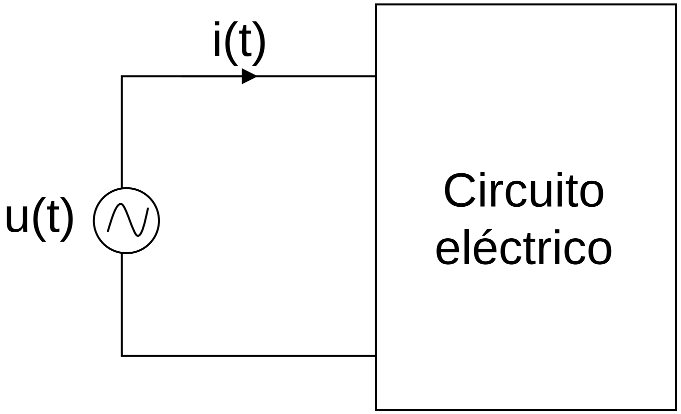
Diagramas fasoriales

- En muchas ocasiones la representación de las tensiones y corrientes de un circuito en diagramas fasoriales es de gran ayuda a la hora de resolver circuios alimentados en corriente continua.



3.4 Potencia en alterna

Potencia en un circuito de C.A.



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Tomaremos la tensión como origen de fases

- Si φ>0 (i retrasada respecto a u): Carga inductiva
- Si φ<0 (i adelantada respecto a u): Carga capacitiva

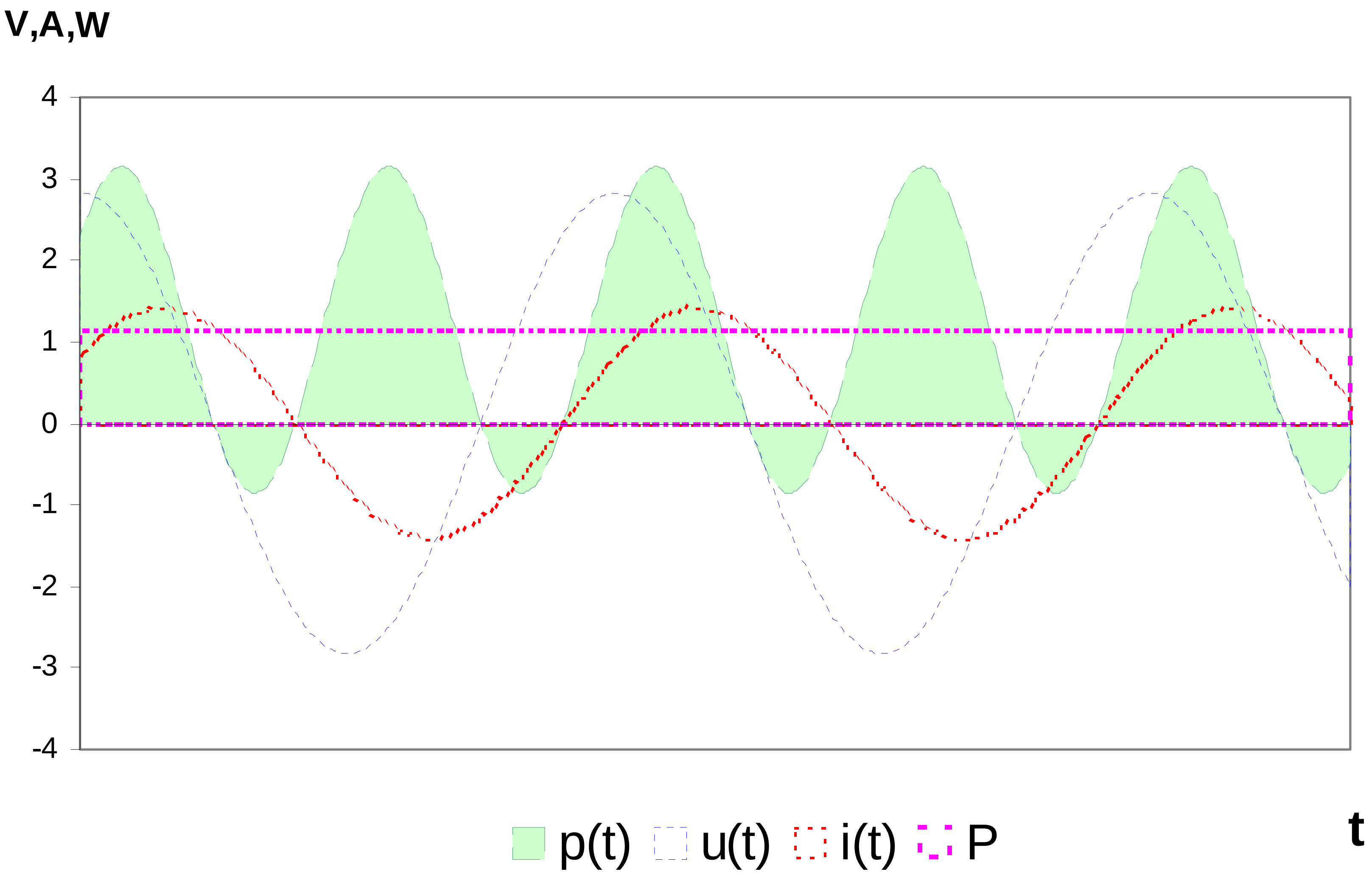
Potencia instantánea

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI\cos\omega t\cos(\omega t - \varphi) =$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$= 2UI\,\frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right) = \underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{término constante}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{término fluctuante de frecuencia doble que u e i}}$$

Potencia instantánea



Potencia instantánea

Signo de la potencia

i>0 y u>0 => p>0

i<0 y u<0 => p>0

i>0 y u<0 => p<0

i>0 y u<0 => p<0

¿Cómo puede ocurrir que una carga a veces absorba y otras ceda potencia?

Las bobinas y los condensadores almacenan energía (p>0) y luego la devuelven a la fuente (p<0)

$$W = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2$$

Potencia media

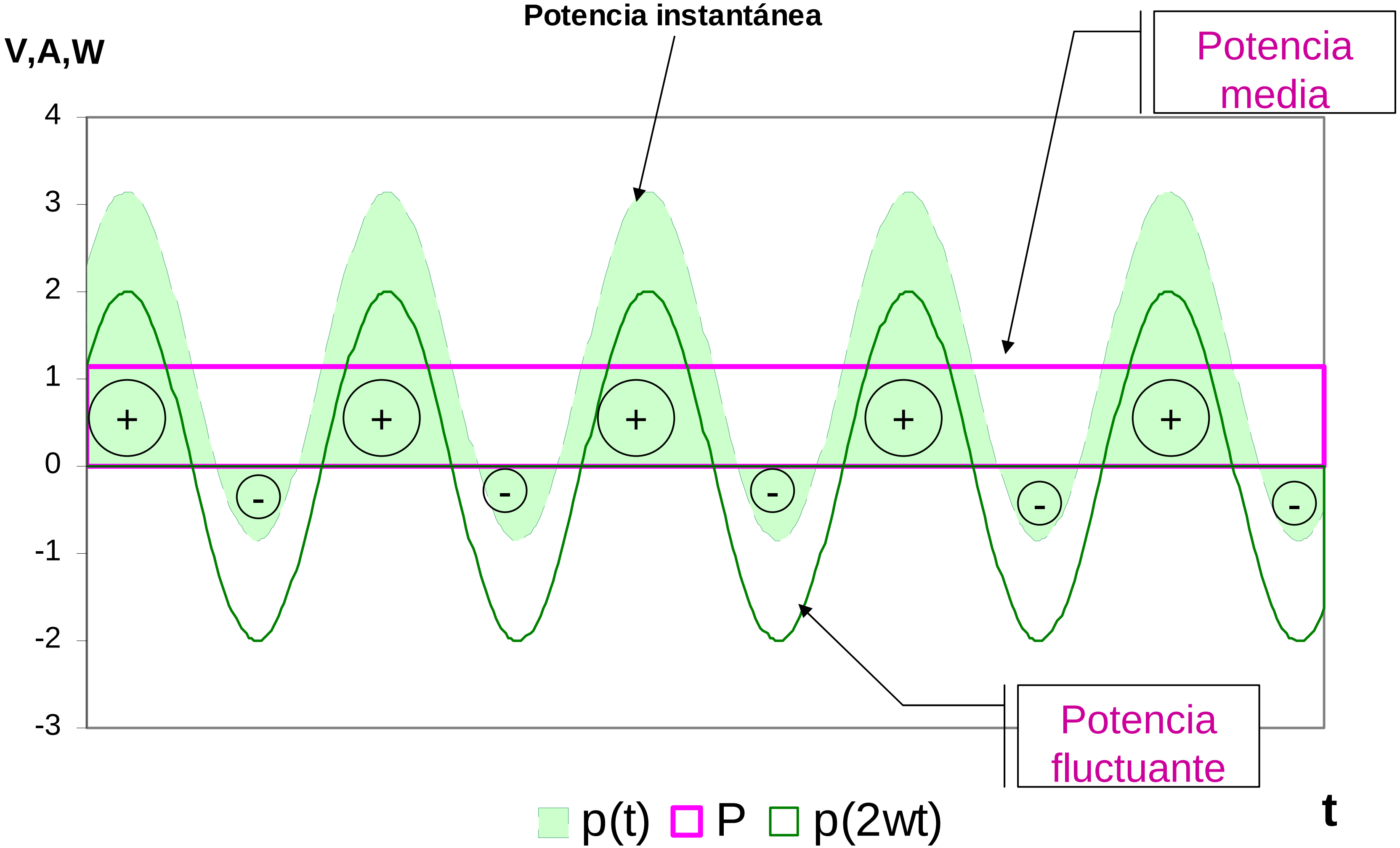
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U \cdot I \cdot \cos\varphi + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)\right]dt =$$

$$= U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

La potencia instantánea se puede expresar como la suma de una potencia media y una potencia fluctuante

$$p(t) = P + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

Potencia


Potencia instantánea
V,A,W
Potencia media
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
+
-
Potencia fluctuante
p(t)
P
p(2wt)
t

Potencia activa y reactiva

$$p(t) = P + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta)$$

$$= P + U \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \cos 2\omega t + U \cdot I \cdot sen\varphi \cdot sen 2\omega t$$

Definición:

Potencia media = potencia activa $\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$

Potencia reactiva $\boxed{Q = U \cdot I \cdot sen\varphi}$

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

Potencia instantánea

$$p(t) = P(1+\cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

- La potencia instantánea absorbida o generada por un circuito consta de dos términos
  - Término constante: P = POTENCIA ACTIVA, igual al valor medio de la potencia instantánea
  - Término oscilante de pulsación 2ω, que a su vez se descompone en dos sumandos
    - Amplitud P y pulsación 2ω $P\cos 2\omega t$
    - Amplitud Q, pulsación 2ω, retrasado 90º $Qsen\, 2\omega t$
- Amplitud de a potencia fluctuante: “Potencia aparente”

$$S = UI$$

Resumen

- Potencia activa $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ [W]
- Potencia reactiva $Q = U \cdot I \cdot sen\varphi$ [VAr]
- Potencia aparente $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [VA]
- Factor de potencia $f.p. = \dfrac{P}{S} = \cos\varphi$ $0 < f.p. \leq 1$

φ= argumento impedancia compleja

- –Cargas inductivas $\varphi>0$
- –Cargas capacitivas $\varphi<0$

Potencia en una resistencia

$$Z_R = R$$

$$U = RI \quad \begin{cases} \varphi = 0^{\circ} \\ U = RI \end{cases}$$

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos\omega t$$

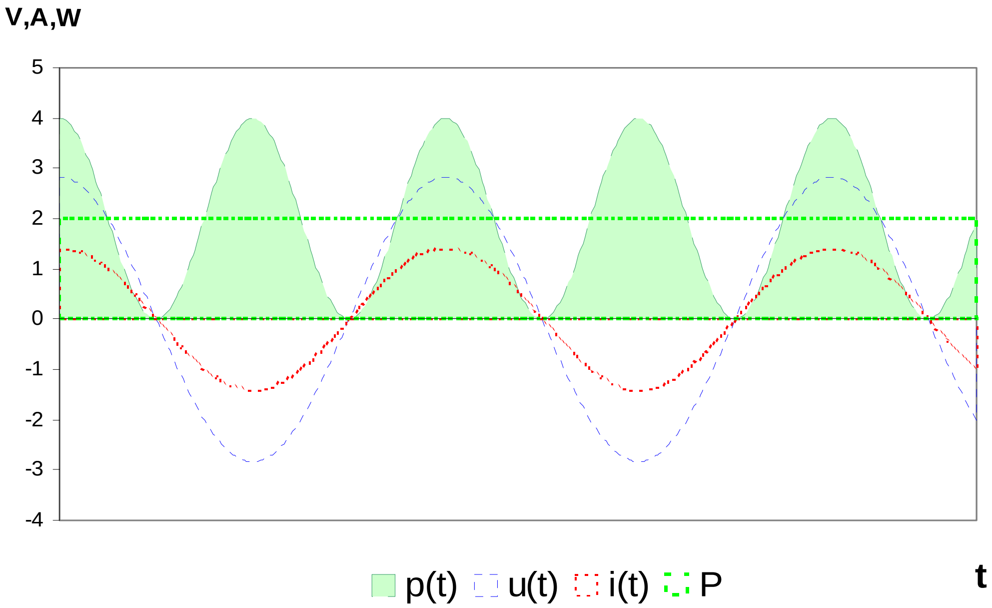
$$P_R = UI\cos\varphi = UI = RI^2$$

$$Q_R = UIsen\varphi = 0$$

$$S_R = UI = P_R$$

Una resistencia únicamente consume potencia activa

Potencia en una resistencia



$$p(t)_R = P_R(1+\cos 2\omega t)$$

La potencia activa consumida varía entre 0 y $2P_R$ en función de los valores absolutos de u e i

Potencia en una bobina

$$Z_L = j\omega L$$

$$U = j\omega L I \quad \Rightarrow I = \frac{U}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L}\angle -90^{o}$$

I retrasada 90º respecto a *U*

$$U = L\omega I \qquad \varphi = 90^{o}$$

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t \qquad i(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega t - 90^{o}\right)$$

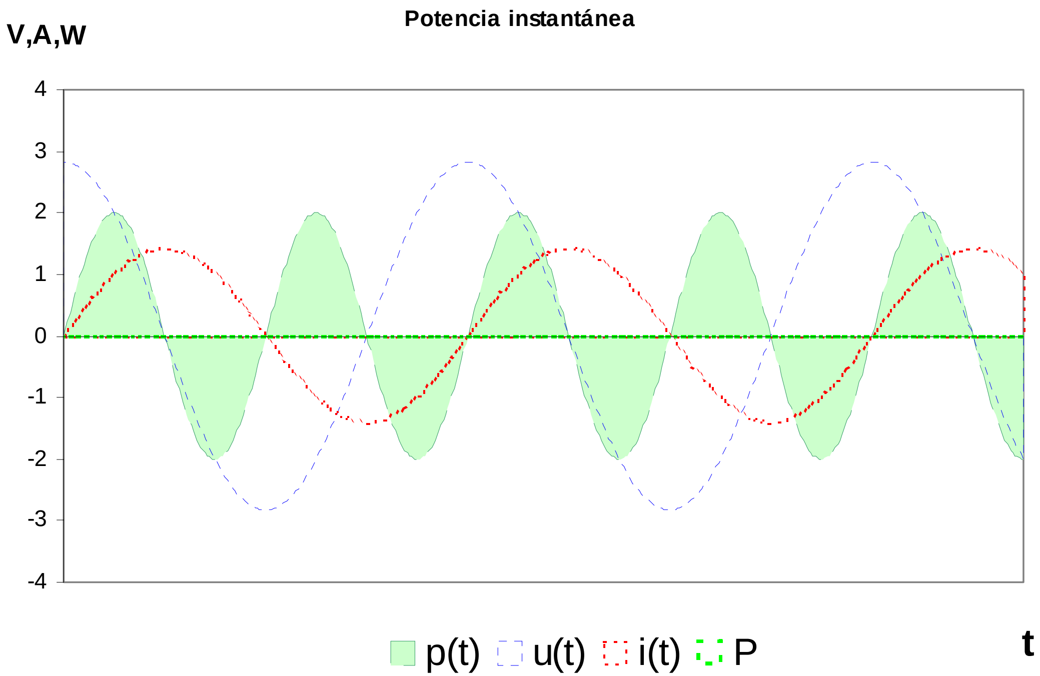
$$P_L = UI\cos\varphi = 0$$

$$Q_R = UIsen\varphi = UI = L\omega I^2 = X_L I^2 > 0$$

$$S_L = UI = Q_L$$

Una bobina **consume** potencia reactiva

Potencia en una bobina



$$p(t)_L = Q_L(sen2\omega t)$$

•La potencia reactiva va oscilando entre la fuente y la bobina

•La potencia media es 0

Potencia en un condensador

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$U = \frac{1}{j\omega L} I \quad \Rightarrow I = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = U\omega C\angle 90^{\circ}$$ *I* adelantada 90º respecto a *U*

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I \qquad \varphi = -90^{\circ}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos\left(\omega t - 90^{\circ}\right)$$

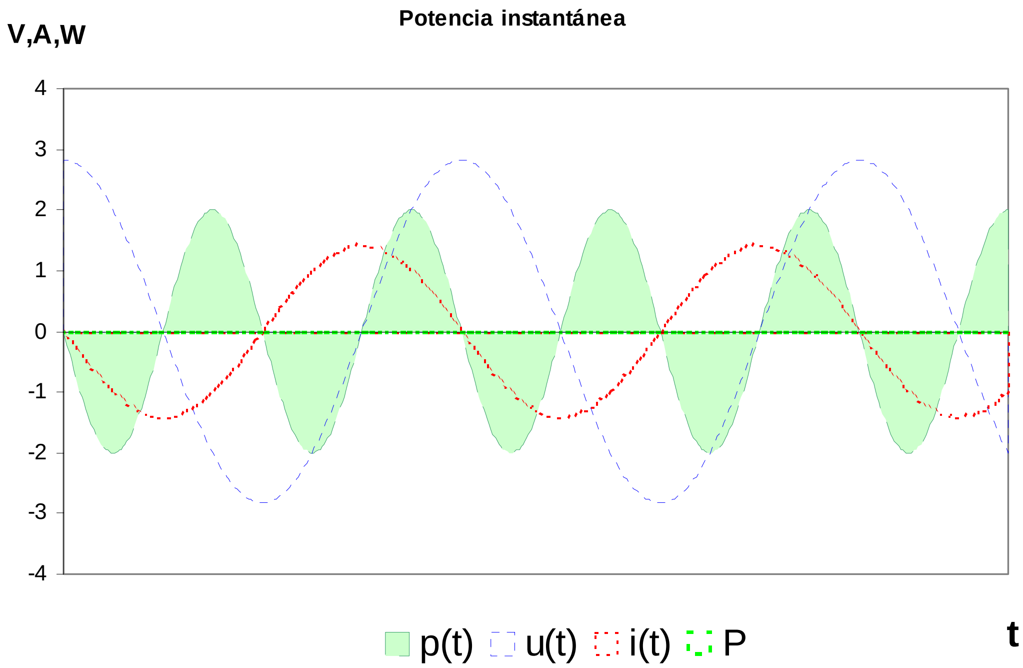
$$P_C = UI\cos\varphi = 0$$

$$Q_C = UIsen\varphi = UI = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -X_C I^2 < 0$$

Un condensador **cede** potencia reactiva

$$S_C = UI = Q_C$$

Potencia en un condensador



$$p(t)_C = Q_C(sen2\omega t)$$

•La potencia reactiva va oscilando entre la fuente y el condensador

•No existe disipación de energía sino intercambio (P_{med}=0)

Conclusión P y Q

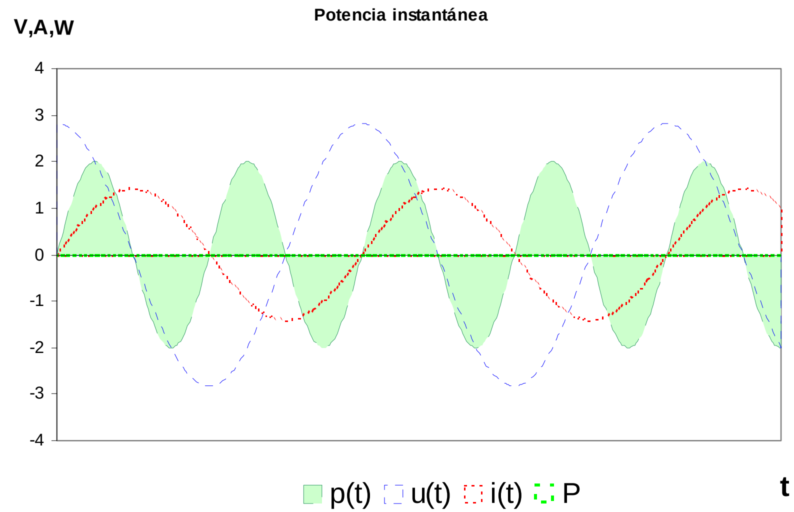
- P representa el consumo de energía en las resistencias (P es el valor medio de la potencia disipada)

- Q representa un intercambio de energía entre las bobinas y condensadores y la fuente (Q es la amplitud de la energía intercambiada)
  - $Q_C<0$=> un condensador cede potencia reactiva
  - $Q_L>0$=> una bobina consume potencia reactiva

Potencia reactiva

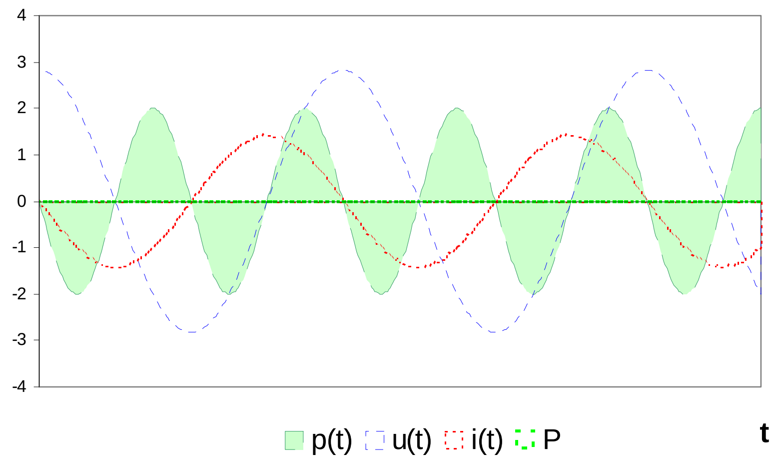
BOBINA

Q>0

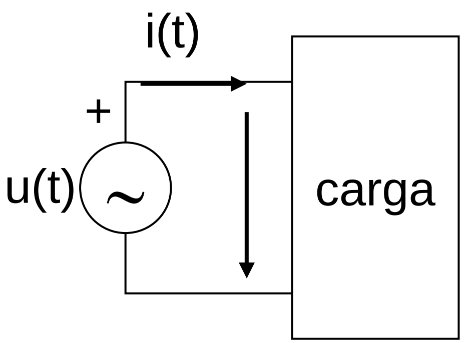


CONDENSADOR

Q<0



Potencia compleja



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \qquad \mathbf{U} = U\angle 0^{\circ}$$

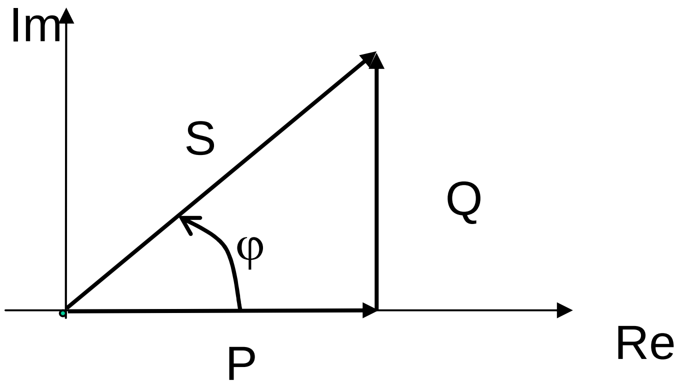
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi) \qquad \mathbf{I} = I\angle -\varphi$$

Se define potencia compleja

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{I}^{*} = U\angle 0^{\circ}\, I\angle \varphi = UI\angle \varphi$$

$$\mathbf{S} = UI\cos\varphi + jUIsen\varphi = P + jQ$$

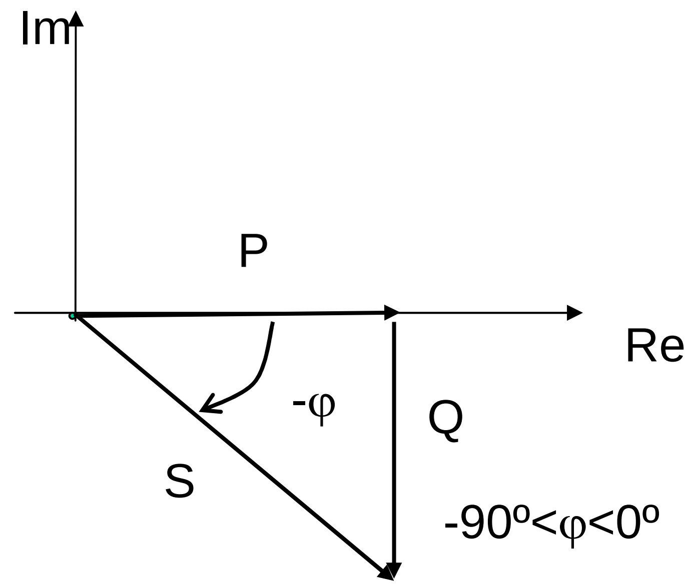
Triángulo de potencias



$0^{\circ} < \varphi < 90^{\circ}$

Q>0 carga inductiva

(P>0 carga)



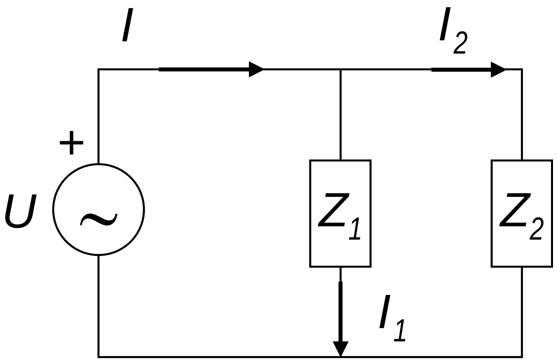
$-90^{\circ} < \varphi < 0^{\circ}$

Q<0 carga capacitiva

(P>0 carga)

Teorema de Boucherot

- Principio de conservación de la potencia compleja



$$S = UI^* = U(I_1 + I_2)^* = UI_1^* + UI_2^* = S_1 + S_2$$

La potencia compleja suministrada por las fuente/s es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas

$$P_G = \sum_k P_k$$

$$Q_G = \sum_k Q_k$$

$$\Rightarrow \quad S_G = \sqrt{P_G^2 + Q_G^2}$$

Importancia del factor de potencia

$$p(t) = P(1+\cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

- P= potencia media consumida (consumo de potencia en R)
- Q=Amplitud de la fluctuación de energía entre la fuente y la carga (carga y descarga de las bobinas y condensadores)
- Q no requiere aportación de energía por parte de la fuente (P neta es 0), pero hace circular corriente por las líneas
- La circulación de corriente produce pérdidas de potencia activa
- Es necesario limitar el consumo de reactiva
- Interesa que el f.d.p. sea lo más alto posible

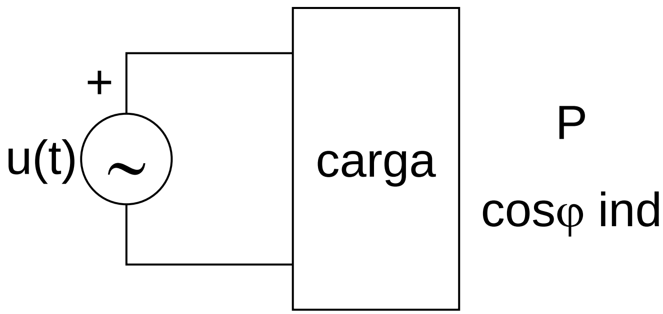
Inconvenientes de cosφ pobre

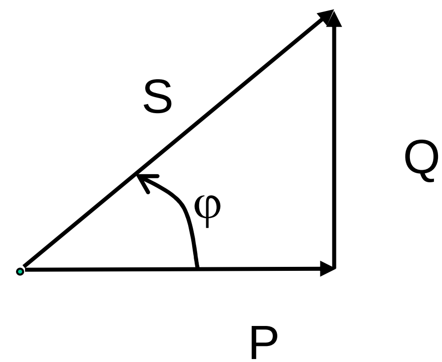
1. Aumenta la corriente consumida
2. Aumentan las pérdidas en las líneas
3. Disminuye el rendimiento
4. Aumenta la caída de tensión en las líneas
5. Aumenta la potencia aparente consumida

Compensación del factor de potencia

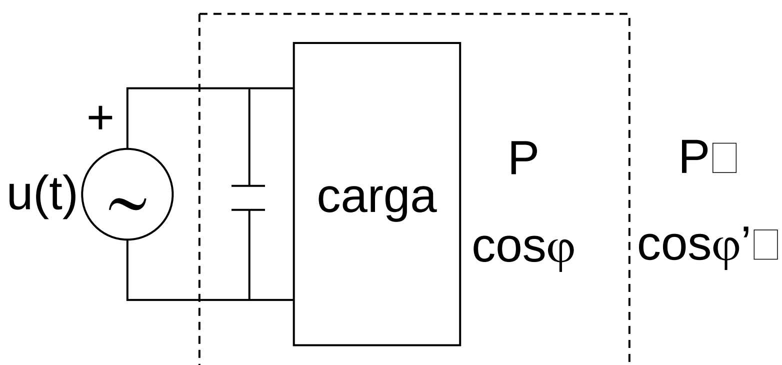
- Es conveniente trabajar con factores de potencia próximos a la unidad
- Pero las cargas pueden necesitar para su funcionamiento potencia reactiva (generalmente son de tipo inductivo= alimentación de motores)
- Es necesario compensar el consumo de potencia reactiva mediante baterías de condensadores

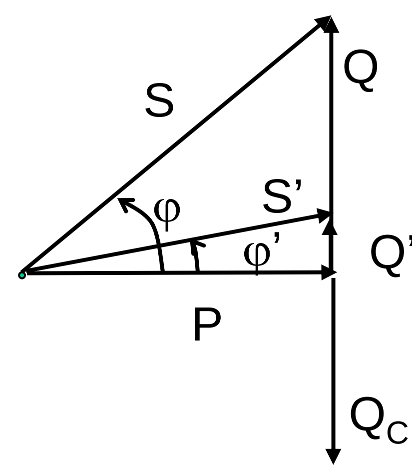
Compensación de reactiva





Se puede colocar una batería de condensadores de capacidad C en paralelo con la carga que genere parte de la Q consumida



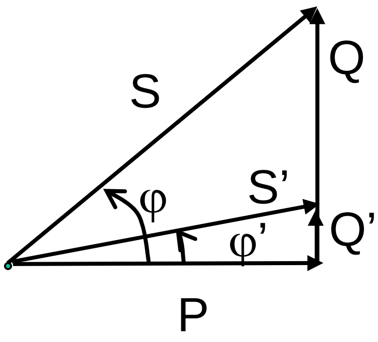


Compensación de reactiva

Potencia reactiva cedida por el condensador

$$Q_C = UIsen\varphi_C = -UI = -\omega CU^2$$

$$sen\varphi_C = -1$$



$$Q - Q' = \Delta Q = \omega CU^2 \qquad Q - Q' = Ptg\varphi - Ptg\varphi'$$

$$\omega CU^2 = P(tg\varphi - tg\varphi')$$

$$\boxed{C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega U^2}}$$

Capacidad de la batería de condensadores para compensar ΔQ